Operaciones de cambio tipo Kernel a partir de operaciones tipo Partial Meet

Marcelo A. Falappa   Guillermo R. Simari

Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Artificial
Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253 - (B8000CPB) Bahía Blanca - Argentina
PHONE/FAX: (+54) 291 459 5136
E-MAIL: [mfalappa,grs]@cs.uns.edu.ar

Palabras Clave: Revisión de Creencias, Dinámica de Creencias, Teoría de Cambio.

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio de las operaciones de cambio de la teoría de cambio de creencias, contracciones y revisiones, en sus dos formas más tradicionales: tipo *partial meet* y tipo *kernel*.

Las operaciones de cambio de tipo partial meet fueron introducidas en el modelo AGM (Alchourrón, Gärdenfors y Makinson [AGM85]) y se basan en dos items: un conjunto de restos y una función de selección. Por su parte, las operaciones de cambio de tipo kernel fueron introducidas por Hansson [Han93] y también se basan en dos items: un conjunto de kernels y una función de incisión.

Estas operaciones constan de teoremas de representación que permiten vislumbrar que cada operación de tipo partial es una operación de tipo kernel. A continuación presentaremos un mapeo que permite, a partir de una operación de cambio de tipo partial meet, definir la correspondiente operación tipo kernel. Este mapeo define básicamente funciones de incisión a partir de funciones de selección.

1. Introducción

Los sistemas de revisión de creencias son sistemas lógicos para modelar la dinámica de conocimiento, esto es, como modificar nuestras creencias ante el arribo de información nueva. El problema surge cuando esta información es inconsistente con las creencias que representan nuestro estado de conocimiento. Puesto que es deseable preservar consistencia en el estado de conocimiento, generalmente es necesario eliminar ciertas creencias preservando tanta información original como sea posible (principio de *mínimo cambio* [AGM85, Gä88]).

Existen muchos sistemas para modelar la dinámica de conocimiento. Los más populares son el modelo AGM [AGM85] para representar cambios en las creencias de un agente, y el modelo de Updating [KM92] para representar cambios en el mundo. En este trabajo analizaremos las operaciones que representan cambios en las creencias de un agente por lo que restringiremos nuestro análisis.

El modelo AGM define tres tipos de operaciones de cambio: expansiones, contracciones y revisiones. Las expansiones se definen mediante operadores de consecuencia y uniones de conjuntos por lo que su definición es directa. En cambio, las contracciones y las revisiones requieren eliminar creencias del conocimiento de un agente por lo que es necesario contar con algún *mecanismo de selección* para determinar que sentencias serán eliminadas. Las contracciones en el modelo AGM se denominan *partial meet contractions* y están basadas en la selección de los subconjuntos maximales que no implican la información a ser eliminada. Para hacer esto, las partial meet contraction usan *funciones de selección*.

Por otra parte, las *kernel contractions* [Han93] se definen de manera diferente: se calculan los subconjuntos minimales que implican la información a ser eliminada; luego utiliza una *función de incisión* que "corta" cada uno de estos conjuntos y se eliminan las sentencias que selecciona tal función.

Los teoremas de representación de estos dos tipos de contracciones muestran que, toda operación de partial meet contraction es una operación de kernel contraction (la recíproca no es cierta). Más aún, es posible definir otros tipos de operadores que preservan esta regla: *consolidaciones* [Han97a] que realizan una contracción de un conjunto de sentencias con respecto a una contradicción, *semi-revisiones* [Han97a] que realizan una revisión no priorizada (esto es, donde la información nueva puede ser descartada) de un conjunto de sentencias por una sentencia, y *revisiones por conjuntos de sentencias* [FKIS02] que realizan una revisión no priorizada de un conjunto de sentencias con respecto a un conjunto de sentencias.

En este trabajo presentamos un mecanismo para definir operaciones de tipo kernel a partir de operaciones de tipo partial meet. La forma en que realiza esto es definiendo una función de incisión a partir de una función de selección [FS02]. Para ello analizaremos contracciones y revisiones tipo AGM sobre conjuntos no clausurados, y dos tipos de cambios no priorizados: semi-revisiones y revisiones por conjuntos de sentencias. A su vez, distinguiremos las propiedades que deben satisfacer las funciones de selección, dependiendo del tipo de cambio realizado, priorizado o no.

2. Operaciones de cambio sobre conjuntos no clausurados

2.1. Partial meet contractions

Las operaciones de partial meet contraction de un conjunto K con respecto a una sentencia α se definen (informalmente) como la intersección de los "mejores" subconjuntos maximales de K que fallan en implicar α. A continuación, definiremos formalmente la noción de conjunto de restos, función de selección y partial meet contraction.

Definición 1: Sea K un conjunto de sentencias y α una sentencia. Entonces $K^{\perp}\alpha$ es el conjunto de todos los K' tales que $K' \in K^{\perp}\alpha$ si y solo si $K' \subseteq K$, $K' \nvdash \alpha$ y si $K' \subset K'' \subseteq K$ entonces $K'' \vdash \alpha$. El conjunto $K^{\perp}\alpha$ se denomina *conjunto de restos* de K con respecto a α, y sus elementos se denominan *α-restos de K*. ■

Por ejemplo, si $K = \{p, p \to q, r, r \to s, r \wedge s \to q, t \to u\}$ entonces el conjunto de q-restos es $\{\{p \to q, r \to s, r \wedge s \to q, t \to u\}, \{p, r \to s, r \wedge s \to q, t \to u\}$, $\{p \to q, r, r \wedge s \to q, t \to$

$u\}, \{p, r, r \wedge s \to q, t \to u\}\}$. El conjunto de v-restos de K es igual a $\{K\}$ puesto que $K \nvdash v$. El conjunto de $(p \to p)$-restos de K es $\varnothing$ debido a que $p \to p \in Cn(\varnothing)$ y ningún subconjunto de K falla en implicar $p \to p$.

Definición 2: Sea K un conjunto de sentencias. Una *función de selección para* K es una función "γ" ($\gamma : \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathcal{L}}} \Rightarrow \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathcal{L}}}$) tal que para cualquier sentencia $\alpha \in \mathcal{L}$, se verifica que:
1) $\varnothing \neq \gamma(K^{\perp}\alpha) \subseteq K^{\perp}\alpha$.
2) Si $K^{\perp}\alpha = \varnothing$ entonces $\gamma(K^{\perp}\alpha) = K$. ■

Por ejemplo, dado $K = \{p, p \to q, r, r \to q, \neg s\}$ y $\alpha = q$ entonces $K^{\perp}\alpha = \{\{p, r, \neg s\}, \{p, r \to q, \neg s\}, \{p \to q, r, \neg s\}, \{p \to q, r \to q, \neg s\}\}$ y algunos posibles resultados de $\gamma(K^{\perp}\alpha)$ son $\{\{p, r, \neg s\}\}$, $\{\{p, r \to q, \neg s\}\}$, $\{\{p, r, \neg s\}, \{p \to q, r \to q, \neg s\}\}$ y $\{\{p, r \to q, \neg s\}, \{p \to q, r, \neg s\}, \{p \to q, r \to q, \neg s\}\}$.

Definición 3: Sea K un conjunto de sentencias, α una sentencia y γ una función de selección para K. La operación de *partial meet contraction* de K con respecto a α, denotada como $K \div_{\gamma} \alpha$, se define como:

$$K \div_{\gamma} \alpha = \cap \gamma(K^{\perp}\alpha)$$

Esto es, $K \div_{\gamma} \alpha$ es igual a la intersección de los α-restos de K seleccionados por γ. ■

Por ejemplo, considerando $K = \{p, p \to q, r, r \to q, \neg s\}$, $\alpha = q$ y $K^{\perp}\alpha = \{\{p, r, \neg s\}, \{p, r \to q, \neg s\}, \{p \to q, r, \neg s\}, \{p \to q, r \to q, \neg s\}\}$ entonces algunos posibles resultados de $K \div_{\gamma} \alpha$ son $\{p, \neg s\}$, $\{\neg s\}$ y $\{p \to q, \neg s\}$.

2.2. Kernel contractions

Las operaciones de kernel contraction de un conjunto K con respecto a una sentencia α se definen (informalmente) como la diferencia entre el conjunto original y el conjunto de elementos seleccionados por la función de incisión. Esta función de incisión "'corta" cada conjunto minimal (kernel) que implica a la sentencia α. A continuación, definiremos formalmente la noción de conjunto de kernels, función de incisión y kernel contraction.

Definición 4: Sea K un conjunto de sentencias y α una sentencia. $K^{\perp\!\!\perp}\alpha$ es el conjunto de conjuntos K' tales que $K' \in K^{\perp\!\!\perp}\alpha$ si $K' \subseteq K$, $K' \vdash \alpha$, y si $K'' \subset K'$ entonces $K'' \nvdash \alpha$. El conjunto $K^{\perp\!\!\perp}\alpha$ se denomina *conjunto de kernels*, y sus elementos se denominan los *α-kernels de K*. ■

Por ejemplo, dado $K = \{p, p \to q, r, r \to s, r \wedge s \to q, t \to u\}$ y $\alpha = q$ entonces el conjunto de α-kernels es $K^{\perp\!\!\perp}\alpha = \{\{p, p \to q\}, \{r, r \to s, r \wedge s \to q\}\}$. If $K = \{p, p \to q\}$ entonces $K^{\perp\!\!\perp}(p \to p) = \{\varnothing\}$ puesto que $p \to p \in Cn(\varnothing)$ y $K^{\perp\!\!\perp}\neg p = \varnothing$ ya que $K \nvdash \neg p$.

Definición 5: Sea K un conjunto de sentencias. Una *función de incisión para* K es una función "σ"($\sigma : \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathcal{L}}} \Rightarrow \mathbf{2}^{\mathcal{L}}$) tal que, para cualquier sentencia $\alpha \in \mathcal{L}$, se verifica que:
1) $\sigma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha) \subseteq \cup(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$.
2) Si $X \in K^{\perp\!\!\perp}\alpha$ y $X \neq \varnothing$ entonces $(X \cap \sigma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)) \neq \varnothing$.
El caso límite en que $K^{\perp\!\!\perp}\alpha = \varnothing$ entonces $\sigma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha) = \varnothing$. ■

La función de incisión selecciona las sentencias de K que serán removidas y se denomina así porque realiza una incisión en cada α-kernel. Por ejemplo, considerando $K = \{p, p \rightarrow q, r, r \rightarrow s, r \wedge s \rightarrow q, t \rightarrow u\}$ y $\alpha = q$ entonces $K^{\perp\!\!\perp}\alpha = \{\{p, p \rightarrow q\}, \{r, r \rightarrow s, r \wedge s \rightarrow q\}\}$ algunos posibles resultados de $\sigma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$ son $\{p, p \rightarrow q, r \rightarrow s\}$, $\{p \rightarrow q, r \wedge s \rightarrow q\}$ y $\{p, r\}$.

Definición 6: Sea K un conjunto de sentencias, α una sentencia y γ una función de incisión para K. La operación de *kernel contraction* de K con respecto a α, denotada como $K \div_\sigma \alpha$, se define como:

$$K \div_\sigma \alpha = K \setminus \sigma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$$

Esto es, $K \div_\sigma \alpha$ es igual a K menos las sentencias de los α-kernels de K seleccionadas por σ. ■

3. Funciones de Incisión a partir de Funciones de Selección

Dado que toda operación de partial meet contraction (revision) es una kernel contraction (revision) surge una pregunta puntual: ¿es posible definir un operador de kernel contraction a partir de un operador de partial meet contraction? O, para ser más específicos: ¿es posible definir un función de incisión a partir de una función de selección? A continuación, presentaremos la definición de este mapeo presentada en [FS02].

Definición 7: Sea γ una función de selección para un conjunto K. Podemos definir una función de incisión σ_γ como sigue: si $\beta \in K$ y $\beta \notin \cap\gamma(K^{\perp}\alpha)$ entonces $\beta \in \sigma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$. ■

La intuición de esta definición es la siguiente: β es seleccionado por una función de incisión σ (sobre el conjunto de α-kernels de K) si β no pertenece a algún α-resto de K seleccionado por γ. Por ejemplo, si $K = \{p, r, s, p \rightarrow q, r \rightarrow q, \neg t \rightarrow \neg q\}$ entonces $K^{\perp}q = \{\{p, r, s, \neg t \rightarrow \neg q\}, \{p, s, r \rightarrow q, \neg t \rightarrow \neg q\}, \{s, p \rightarrow q, r \rightarrow q, \neg t \rightarrow \neg q\}, \{r, s, p \rightarrow q, \neg t \rightarrow \neg q\}\}$. Supongamos que $\gamma(K^{\perp}q) = \{\{p, r, s, \neg t \rightarrow \neg q\}, \{r, s, p \rightarrow q, \neg t \rightarrow \neg q\}\}$. Entonces la función de incisión asociada es $\sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}q) = \sigma_\gamma(\{p, p \rightarrow q\}, \{r, r \rightarrow q\}\}) = \{p, p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$.

Las siguientes observaciones [Han93] serán utilizadas para demostrar que la función σ_γ es una función de incisión bien definida.

Observación 1: Las siguientes tres condiciones son equivalentes:
1) $K^{\perp}\alpha = K^{\perp}\beta$.
2) $K^{\perp\!\!\perp}\alpha = K^{\perp\!\!\perp}\beta$.
3) Para todo subconjunto H de K: $H \vdash \alpha$ si y solo si $H \vdash \beta$.

Observación 2: $\cap(K^{\perp}\alpha) = K \setminus (\cup(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)) = \{\beta \in K :$ para todo $H \subseteq K : H \vdash \alpha$ si y solo si $H \cup \{\beta\} \vdash \alpha\}$.

Proposición 1: La función σ_γ presentada en la Definición 7 es una función de incisión.

Demostración.
Debemos demostrar que:

1. σ_γ es una función bien definida. Supongamos que $K^{\perp\!\!\perp}\alpha = K^{\perp\!\!\perp}\beta$. Debemos demostrar que $\sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha) = \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\beta)$.

   ($\subseteq$) Supongamos que $\delta \in \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$. Debemos probar que $\delta \in \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\beta)$. Sea $\delta \in K$, $\delta \notin \cap\, \sigma(K^{\perp}\alpha)$. Como $K^{\perp\!\!\perp}\alpha = K^{\perp\!\!\perp}\beta$, por Observación 1, tenemos que $K^{\perp}\alpha = K^{\perp}\beta$. Como γ es una función bien definida, entonces $\gamma(K^{\perp}\alpha) = \gamma(K^{\perp}\beta)$. Por lo tanto, $\delta \in K$, $\delta \notin \cap\, \sigma(K^{\perp}\beta)$ y, por definición de σ_γ, obtenemos que $\delta \in \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\beta)$.

   ($\supseteq$) Supongamos que $\delta \in \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\beta)$. Debemos probar que $\delta \in \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$. Sea $\delta \in K$, $\delta \notin \cap\, \sigma(K^{\perp}\beta)$. Como $K^{\perp\!\!\perp}\beta = K^{\perp\!\!\perp}\alpha$, por Observación 1, tenemos que $K^{\perp}\beta = K^{\perp}\alpha$. Como γ es una función bien definida, entonces $\gamma(K^{\perp}\beta) = \gamma(K^{\perp}\alpha)$. Por lo tanto, $\delta \in K$, $\delta \notin \cap\, \sigma(K^{\perp}\alpha)$ y, por definición de σ_γ, obtenemos que $\delta \in \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$.

2. $\sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha) \subseteq \cup(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$.

   Sea $\delta \in \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$. Debemos demostrar que $\delta \in \cup(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$. Sea $\delta \in K$, $\delta \notin \cap\, \gamma(K^{\perp}\alpha)$ y $\delta \in \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$. Si $\delta \in K$ y $\delta \notin \cap\, \gamma(K^{\perp}\alpha)$ entonces existe un subconjunto maximal X de K (seleccionado por γ) que falla en implicar α. Entonces existe un subconjunto Z de K tal que $\delta \in Z$ y $Z \vdash \alpha$. Por lo tanto, podemos construir un subconjunto minimal Z' de Z tal que $\delta \in Z'$ y $Z' \vdash \alpha$. Esto es, $Z' \in K^{\perp\!\!\perp}\alpha$ y $\delta \in \cup(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$.

3. Si $X \in K^{\perp\!\!\perp}\alpha$ y $X \neq \varnothing$ entonces $(X \cap \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)) \neq \varnothing$.

   Si $X \in K^{\perp\!\!\perp}\alpha$ entonces existe un subconjunto de K que deduce α. Si $X \neq \varnothing$ entonces $\alpha \notin Cn(\varnothing)$ y existe $\delta \in X$. Debemos demostrar que $\delta \in \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$. Por el contrario, supongamos que $\delta \notin \sigma_\gamma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$. Por definición de σ_γ, debe ser el caso en que $\delta \notin K$ o bien $\delta \in \cap\gamma(K^{\perp}\alpha)$. $\delta \notin K$ es absurdo pues $\delta \in X$ y $X \subseteq K$. $\delta \in \cap\gamma(K^{\perp}\alpha)$ significa que δ pertenece a todo subconjunto maximal de K (seleccionado por γ) que falla en deducir α. Como esto vale para cualquier función de selección γ, entonces tenemos que $\delta \in \cap(K^{\perp}\alpha)$. Por Observación 2, $\delta \in K \setminus (\cup(K^{\perp\!\!\perp}\alpha))$. Esto implica que $\delta \in K$ y $\delta \notin \cup\,(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$. Pero eso es absurdo pues $\delta \in X$ y $X \in K^{\perp\!\!\perp}\alpha$.

4. Postulados característicos

Los operadores de cambio que hemos presentado están caracterizados por una serie de postulados. Sea K un conjunto de sentencias, α una sentencia y "$-$" un operador de contracción para K. Algunos postulados para "$-$" son:

Inclusión: $K{-}\alpha \subseteq K$.

Exito: Si $\nvdash \alpha$ entonces $K{-}\alpha \nvdash \alpha$.

Retención de Núcleo: Si $\beta \in K$ y $\beta \notin K{-}\alpha$, entonces existe un conjunto H tal que $H \subseteq K$ tal que $H \nvdash \alpha$ y $H \cup \{\beta\} \vdash \alpha$.

Relevancia: Si $\beta \in K$ y $\beta \notin K{-}\alpha$, entonces existe un conjunto H tal que $K{-}\alpha \subseteq H \subseteq K$ tal que $H \nvdash \alpha$ y $H \cup \{\beta\} \vdash \alpha$.

Uniformidad: Si para todo subconjunto H de K vale que $H \vdash \alpha$ si y solo si $H \vdash \beta$ entonces $K{-}\alpha = K{-}\beta$.

Los siguientes teoremas de representación muestran que los operadores de partial meet contraction son operadores de kernel contraction.

Teorema 1 (Hansson [Han92]): Sea K un conjunto de sentencias, α una sentencia y γ una función de selección para K. "$\div_\gamma$" es un operador de *partial meet contraction* (*i.e.*, $K \div_\gamma \alpha = \cap\gamma(K^\perp\alpha)$) si y solo si satisface *inclusión*, *éxito*, *relevancia* y *uniformidad*.

Teorema 2 (Hansson [Han93]): Sea K un conjunto de sentencias, α una sentencia y σ una función de incisión para K. "$\div_\sigma$" es un operador de *kernel contraction* (*i.e.*, $K \div_\sigma \alpha = K \setminus \sigma(K^{\perp\!\!\perp}\alpha)$) si y solo si satisface *inclusión*, *éxito*, *retención de núcleo* y *uniformidad*.

Puesto que *relevancia* implica trivialmente *retención de núcleo*, todo operador de partial meet contraction es un operador de kernel contraction.

4.1. Revisiones en conjuntos no clausurados

Las revisiones son operadores de cambio que permiten incorporar una sentencia α a un conjunto K preservando consistencia cuando α no es contradictoria. Este tipo de operaciones permiten agregar información eliminando ciertas sentencias con el objeto de preservar consistencia. Este tipo de operaciones se conoce como *revisiones priorizadas* ya que la sentencia que representa la entrada epistémica tiene prioridad sobre la información que es parte del estado epistémico de un agente.

Las operadores de revision pueden definirse a partir de operaciones contracción mediante la identidad de Levi: para revisar un conjunto K con respecto a una sentencia α, primero, eliminamos $\neg\alpha$ de K y luego agregamos α al conjunto resultante. Esto es, si "$-$" es un operador de contracción para K podemos definir un operador de revisión "$*$" de la siguiente manera: $K{*}\alpha = (K{-}\neg\alpha) \cup \{\alpha\}$.

Las revisiones tipo partial meet se obtienen aplicando la identidad de Levi sobre contracciones tipo partial meet; análogamente, las revisiones tipo kernel se obtienen aplicando tal identidad sobre kernel contractions. A partir de los teoremas de representación de estos dos tipos de revisiones [Han96] es claro que cada operador de revision tipo partial meet es un operador de revision tipo kernel.

Por lo tanto, nuestra intención de definir funciones de incisión a partir de funciones de selección es plausible. Sin embargo, el mapeo que definimos anteriormente es válido en operadores de cambio *internos*, esto es, cambios que afectan solamente a creencias dentro de un conjunto de sentencias K. Podemos definir operadores de cambio *externos*, esto es, operadores de cambio que deban seleccionar sentencias más allá de K. En la próxima sección, presentaremos operadores de cambio no priorizados que requieren de restricciones adicionales en la función de selección para definir correctamente funciones de incisión.

5. Operadores de cambio no priorizados

5.1. Semi-revisiones

Los operadores de cambio *no priorizados* son operadores de cambio en los que, la nueva información, no siempre es la mejor [Han97b]. Los operadores de cambio del modelo AGM y sus derivados, son priorizados en el sentido de que la nueva información tiene prioridad sobre la que forma parte del conocimiento de un agente. Esto es, si K es un conjunto de sentencias, α una sentencia de entrada y "$*$" un operador de revisión, entonces "$*$" satisface el postulado de *éxito*, esto es, $K*\alpha \vdash \alpha$. Este postulado no es plausible si tratamos de modelar situaciones del mundo real, puesto que muchas veces la nueva información (α) puede ser contradictoria en si o puede ser obtenida de fuentes poco confiables.

Los operadores de cambio no priorizados no siempre le asignan mayor grado de credibilidad a la nueva información. Un ejemplo característico es el operador de semi-revisión propuesto por Hansson. Sea K el conjunto de sentencias que representa el conocimiento de un agente y α la sentencia de entrada. El operador de semi-revisión realiza los cambios en dos pasos:

1. Se incorpora α a K.
2. Se elimina toda posible inconsistencia de $K \cup \{\alpha\}$ mediante cierta operación de contracción.

En este operador podemos ver que existe un estado epistémico potencialmente inconsistente ya que, si $K \vdash \neg\alpha$, entonces $K \cup \{\alpha\} \vdash \bot$. Luego, se eliminan las inconsistencias de $K \cup \{\alpha\}$ mediante un operador de contracción. Este operador de contracción puede ser de tipo partial meet o kernel. Sin embargo, no podemos aplicar operadores de contracción tal como en las secciones anteriores ya que las funciones de selección (o incisión) se definen sobre elementos de K (mediante criterios de preferencia entre subconjuntos de K o entre sentencias de K) pero no es posible aplicarlas sobre superconjuntos de K.

Definición 8 (Hansson [Han97a]): Sea K un conjunto de sentencias, α una sentencia y "$-$" un operador de contracción. El operador de *semi-revisión* "$\otimes$" se define como sigue: $K\otimes\alpha = (K \cup \{\alpha\})-\bot$. ■

Esta definición implica que deba definirse un operador de contracción sobre superconjuntos de K, por lo que necesitaremos funciones de selección o incisión (dependiendo del tipo de operador de contracción utilizado) que se aplique sobre superconjuntos de K. Este tipo de funciones de selección/incisión serán denominadas *globales* y las definiremos formalmente en la próxima subsección.

Sea K un conjunto de sentencias, α una sentencia y "$\otimes$" un operador de semi-revisión para K. Hansson [Han97a] propuso los siguientes postulados para este tipo de operadores:

Inclusión: $K\otimes\alpha \subseteq K \cup \{\alpha\}$.

Consistencia Fuerte: $K\otimes\alpha$ es consistente.

Retención de Núcleo: Si $\beta \in K$ y $\beta \notin K\otimes\alpha$ entonces existe un subconjunto H tal que $H \subseteq K \cup \{\alpha\}$, H es consistente pero $H \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.

Relevancia: Si $\beta \in K$ y $\beta \notin K\otimes\alpha$ entonces existe un subconjunto H tal que $K\otimes\alpha \subseteq H \subseteq K \cup \{\alpha\}$, H es consistente pero $H \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.

Cambio Interno: Si $\alpha, \beta \in K$ entonces $K\otimes\alpha = K\otimes\beta$.

Los siguientes teoremas muestran que todo operador de partial meet semi-revision es un operador de kernel semi-revision.

Teorema 3 (Hansson [Han97a]): "$\otimes$" es un operador de *partial meet semi-revision* para K si y solo si satisface *inclusión*, *consistencia fuerte*, *relevancia* y *cambio interno*.

Teorema 4 (Hansson [Han97a]): "$\otimes$" es un operador de *kernel semi-revision* para K si y solo si satisface *inclusión*, *consistencia fuerte*, *retención de núcleo* y *cambio interno*.

5.2. Revisiones por conjuntos de sentencias

En esta sección trataremos con un tipo de operaciones de cambio no priorizadas más generales aún que las semi-revisiones. Este tipo de operaciones se denominan *revisiones por conjuntos de sentencias* [FKIS02] y permiten la revisión de un conjunto de sentencias con respecto a un conjunto arbitrario de sentencias. Sean K un conjunto de sentencias, "$-$" un operador de contracción global para K y A un conjunto de sentencias que representa la entrada epistémica:

1. Se incorpora A a K.
2. Se elimina toda posible inconsistencia de $K \cup A$ realizando una contracción con respecto a $\perp$.

Sea "$\circ$" un operador de revisión mediante conjuntos de sentencias. Los postulados propuestos para este operador son los siguientes:

Inclusión: $K \circ A \subseteq K \cup A$.

Consistencia Fuerte: $K \circ A$ es consistente.

Retención de Núcleo: Si $\alpha \in (K \cup A) \setminus (K \circ A)$ entonces existe un conjunto H tal que $H \subseteq (K \cup A)$, H es consistente pero $H \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.

Relevancia: Si $\alpha \in (K \cup A) \setminus (K \circ A)$ entonces existe un conjunto H tal que $K \circ A \subseteq H \subseteq (K \cup A)$, H es consistente pero $H \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.

Congruencia: Si $K \cup A = K \cup B$ entonces $K \circ A = K \circ B$.

Reversión: Si $K \cup A$ y $K \cup B$ tienen los mismos subconjuntos minimalmente inconsistentes entonces $(K \cup A) \setminus (K \circ A) = (K \cup B) \setminus (K \circ B)$.

Nuevamente, estamos ante un operador de cambio externo ya que deben seleccionarse las sentencias a eliminar sobre superconjuntos de K. Por lo tanto, definiremos una una función de selección global para K.

Definición 9 ([FKIS02]): Sea K un conjunto de sentencias. Una *función de selección global* K es una función "γ" ($\gamma : \mathbf{2^{2^{\mathcal{L}}}} \Rightarrow \mathbf{2^{2^{\mathcal{L}}}}$) tal que para cualquier conjunto $A \subseteq \mathcal{L}$, se verifica que:
1) $\gamma((K \cup A)^{\perp}\perp) \subseteq (K \cup A)^{\perp}\perp$.
2) $\gamma((K \cup A)^{\perp}\perp) \neq \varnothing$. ■

Si bien esta definición parece apropiada, puede verse en [FKIS02] que es necesario agregar ciertas restricciones sobre la función de selección para que se comporte de manera *equitativa*. Para ello, se define la siguiente propiedad [FKIS02]:

Equitatividad: Si $(K \cup A)^{\perp\!\!\perp}\bot = (K \cup B)^{\perp\!\!\perp}\bot$ entonces $(K \cup A) \setminus \cap\gamma((K \cup A)^{\perp}\bot) = (K \cup B) \setminus \cap\gamma((K \cup B)^{\perp}\bot)$.

Un *función de selección equitativa* es una función de selección global que satisface la propiedad de equitatividad. Si una función de selección γ es equitativa, entonces la función de incisión σ_γ que se obtiene en la Definición 7 es una función bien definida. Por ejemplo, sea $K = \{a, b, \neg c\}$, $A = \{\neg b, c, d, e\}$, y $B = \{\neg b, c, f\}$. Entonces:

$$(K \cup A)^{\perp}\alpha = \{\{a, b, c, d, e\}, \{a, \neg b, c, d, e\}, \{a, b, \neg c, d, e\}, \{a, \neg b, \neg c, d, e\}\}$$
$$(K \cup B)^{\perp}\alpha = \{\{a, b, c, f\}, \{a, \neg b, c, f\}, \{a, b, \neg c, f\}, \{a, \neg b, \neg c, f\}\}$$

Tenemos que $(K \cup A)^{\perp\!\!\perp}\bot = (K \cup B)^{\perp\!\!\perp}\bot = \{\{b, \neg b\}, \{c, \neg c\}\}$. Supongamos que $\gamma((K \cup A)^{\perp}\bot)$ es igual a $\{\{a, b, c, d, e\}, \{a, \neg b, c, d, e\}\}$. Esto es, γ selecciona solamente $\bot$-restos conteniendo c. Si γ es una función de selección equitativa entonces $\gamma((K \cup B)^{\perp}\bot) = \{\{a, b, c, f\}, \{a, \neg b, c, f\}\}$. A partir de esto y de la Definición 7, es fácil verificar que σ_γ está bien definida.

La propiedad de equitatividad puede ser generalizada, reemplazando $\bot$ por una sentencia arbitraria α. Sin embargo, los alcances de esta propiedad no están contemplados en este trabajo.

Equitatividad Fuerte: Si $(K \cup A)^{\perp\!\!\perp}\alpha = (K \cup B)^{\perp\!\!\perp}\alpha$ entonces $(K \cup A) \setminus \cap\gamma((K \cup A)^{\perp}\alpha) = (K \cup B) \setminus \cap\gamma((K \cup B)^{\perp}\alpha)$.

Definición 10 ([FKIS02]): Sean K y A conjuntos de sentencias y "γ" una función de selección equitativa para K. El operador "$\circ$" de *revisión partial meet por conjuntos de sentencias* ($\circ : \mathbf{2}^{\mathcal{L}} \times \mathbf{2}^{\mathcal{L}} \Rightarrow \mathbf{2}^{\mathcal{L}}$) se define como $K \circ A = \cap\gamma((K \cup A)^{\perp}\bot)$. ■

A continuación, veremos que también las revisiones partial meet por conjuntos de sentencias son revisiones kernel por conjuntos de sentencias.

Teorema 5 ([FKIS02]): Sea K un conjunto de sentencias. El operador "$\circ$" es una *revisión partial meet revision por conjuntos de sentencias* si y solo si satisface *inclusión*, *consistencia fuerte*, *relevancia* y *reversión*.

Así como definimos funciones de selección globales podemos definir funciones de incisión globales.

Definición 11 ([FKIS02]): Sea K un conjunto de sentencias. Una *función de incisión global para* K es una función "σ"($\sigma : \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathcal{L}}} \Rightarrow \mathbf{2}^{\mathcal{L}}$) tal que para cualquier sentencia $A \subseteq \mathcal{L}$, se verifica que:
1) $\sigma((K \cup A)^{\perp\!\!\perp}\bot) \subseteq \cup((K \cup A)^{\perp\!\!\perp}\bot)$.
2) Si $X \in (K \cup A)^{\perp\!\!\perp}\bot$ y $X \neq \varnothing$ entonces $(X \cap \sigma((K \cup A)^{\perp\!\!\perp}\bot)) \neq \varnothing$. ■

Podemos obtener una función de incisión global σ_γ a partir de una función de selección equitativa γ aplicando la Definición 7. "γ" debe ser equitativa (no alcanza con que sea global) para que σ_γ esté bien definida.

Definición 12 ([FKIS02]): Sean K y A conjuntos de sentencias y "σ" una función de incisión globales para K. El operador "$\circ$" de *revisión kernel por conjuntos de sentencias* ($\circ : \mathbf{2}^{\mathcal{L}} \times \mathbf{2}^{\mathcal{L}} \Rightarrow \mathbf{2}^{\mathcal{L}}$) se define como $K \circ A = K \setminus \sigma((K \cup A)^{\perp\!\!\perp} \perp)$. ■

Teorema 6 ([FKIS02]): Sea K un conjunto de sentencias. El operador "$\circ$" es una *revisión kernel revision por conjuntos de sentencias* si y solo si satisface *inclusión*, *consistencia fuerte*, *retención de núcleo* y *reversión*.

Como podemos ver, nuevamente un operador de revision de tipo partial meet es un operador de revision de tipo kernel por lo que, el mapeo que hemos definido sigue siendo correcto.

6. Conclusiones y trabajo futuro

Hemos presentado una manera de definir operaciones de tipo kernel a partir de operaciones de tipo partial meet. Esta transformación se concreta definiendo funciones de incisión a partir de funciones de selección. De esta manera, contando con un criterio de preferencia y selección podemos definir otro criterio más general.

A partir del mapeo presentado, hemos demostrado que las funciones de incisión están bien definidas en los distintos modelos en la que la aplicamos. Demostramos que es necesario agregar ciertas restricciones sobre la función de selección cuando las mismas son globales, esto es, cuando se aplican sobre superconjuntos del conjunto a modificar. Como trabajo futuro resta estudiar los alcances de la propiedad de equitatividad fuerte así como también de otras propiedades de las funciones de selección, tales como relacionalidad y transitividad [AGM85].

Referencias

[AGM85] Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors, and David Makinson. *On the Logic of Theory Change: Partial Meet Contraction and Revision Functions. The Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[FKIS02] Marcelo A. Falappa, Gabriele Kern-Isberner, and Guillermo R. Simari. *Belief Revision, Explanations and Defeasible Reasoning. Artificial Intelligence Journal* (en prensa), 2002.

[FS02] Marcelo A. Falappa and Guillermo R. Simari. *On the Logic of Theory Change: Incision Functions from Selection Functions. IV Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación, WICC 2002* (en prensa), 2002.

[Gä88] Peter Gärdenfors. *Knowledge in Flux: Modelling the Dynamics of Epistemic States.* The MIT Press, Bradford Books, Cambridge, Massachusetts, 1988.

[Gä92] Peter Gärdenfors. *Belief Revision.* Gärdenfors, Cambridge University Press, 1992.

[Han92] Sven Ove Hansson. *A Dyadic Representation of Belief.* In **Belief Revision** [Gä92], pages 89–121.

[Han93] Sven Ove Hansson. *Kernel Contraction. The Journal of Symbolic Logic*, 1993.

[Han96] Sven Ove Hansson. *A Textbook of Belief Dymanics: Theory Change and Database Updating*. Uppsala University, Department of Philosophy, Uppsala, Sweden, 1996.

[Han97a] Sven Ove Hansson. *Semi-Revision*. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 7:151–175, 1997.

[Han97b] Sven Ove Hansson. *Theoria: Special Issue on Non-Prioritized Belief Revision*. Department of Philosophy, Uppsala University, 1997.

[KM92] Hirofumi Katsuno and Alberto Mendelzon. *On the Difference Between Updating a Knowledge Database and Revising It*. In **Belief Revision** [Gä92], pages 183–203.